Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Serie Trabajos Docentes

Moneda, Crédito y Bancos

Decisiones Bajo Incertidumbre

Martín Guzman

Trabajo Docente Nro. 11

Noviembre 2010

ISSN 2347-0313

Decisiones bajo incertidumbre

Martín Guzman

Nota de Clase

Moneda, Crédito y Bancos

Departamento de Economía, UNLP

2010

En las clases previas a ésta hemos venido resolviendo modelos en los que existía certidumbre sobre la evolución que seguían las variables de interés. En esta clase extendemos ese marco y permitimos la presencia de incertidumbre. Esto implicará diferencias en dos dimensiones respecto al marco anterior:
- diferencias en cómo se representa la función de utilidad;
- diferencias en la cantidad de restricciones de presupuesto que condicionan la optimización.

En las primeras dos secciones se presentan dos casos que sirven como representación general para el análisis de este tipo de problemas. En la tercera sección se presenta el problema de valuación de activos bajo incertidumbre. En la cuarta sección se analiza el fenómeno conocido como "enigma del premio al riesgo de las acciones", y el relacionado "enigma de la tasa de interés libre de riesgo".

1 Incertidumbre sobre los ingresos

Se supone que el individuo vive dos períodos. Obtiene ingreso y_1 con certeza de forma exógena en el primer período, mientras que hay incertidumbre sobre el ingreso que recibe en el período 2: con probabilidad p recibe y_2^A, y con probabilidad $1-p$ recibe y_2^B. La incertidumbre se resuelve luego del período 1 y antes del período 2.

Obsérvese que en el período 1 se consume la misma cantidad sin importar que ingreso se recibe en el período 2. Sin embargo, en el período 2 se consume el ingreso que se haya realizado más lo que se haya ahorrado en el período 1. Formalmente, el problema es

$$\begin{aligned} &max\ L = u(c_1) + \beta[pu(c_2^A) + (1-p)u(c_2^B)] + \\ &\lambda_A(y_1 + \frac{y_2^A}{1+r} - c_1 - \frac{c_2^A}{1+r}) + \lambda_B(y_1 + \frac{y_2^B}{1+r} - c_1 - \frac{c_2^B}{1+r}) \end{aligned} \tag{1}$$

Pueden observarse dos cuestiones:

- la función objetivo no es más una "utilidad cierta", sino que es una "utilidad esperada" en la que aparecen las probabilidades de ocurrencia de los distintos eventos;

- ya no hay más una única restricción intertemporal de presupuesto que condicione la optimización, sino que hay tantas restricciones como estados de la naturaleza posibles (en este caso, dos). Cada restricción tiene asociado un multiplicador de Lagrange distinto (obérvese que las restricciones NUNCA son ponderadas por las probabilidades de ocurrencia de los eventos).

El problema consiste en elegir $\{c_1, c_2^A, c_2^B\}$ de modo tal de maximizar (1). Las condiciones de primer orden (CPO) del problema, tomando como dado que la solución es interior, son:

$$u'(c_1) - \lambda_A - \lambda_B = 0 \tag{2}$$

$$\beta p u'(c_2^A) - \frac{\lambda_A}{1+r} = 0 \tag{3}$$

$$\beta(1-p)u'(c_2^B) - \frac{\lambda_B}{1+r} = 0 \tag{4}$$

más las CPO respecto a los multiplicadores de Lagrange.

Resolviendo de la manera vista en clase, se obtiene:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)[pu'(c_2^A) + (1-p)u'(c_2^B)] \tag{5}$$

o análogamente

$$u'(c_1) = \beta(1+r)E[u'(c_2)] \tag{6}$$

donde E es el operador esperanza.

Las ecuaciones (5) y (6) representan la ecuación de Euler de este problema. La diferencia respecto al caso básico de certidumbre es que la utilidad marginal del consumo en el período 2 es esperada, y no cierta.

2 Incertidumbre sobre el horizonte temporal de vida

Ahora suponemos que el individuo conoce con certeza el ingreso que recibirá mientras esté vivo, pero que no sabe cuándo va a morir. Lo que conoce es la probabilidad de muerte en cada período.

Para simplificar, se supone que el individuo recibe ingreso solamente en el primer período, y_1. Con probabilidad $1-p$ vive solamente dos períodos, y con probabilidad p vive tres períodos. El "timing" de la resolución de la incertidumbre es idéntico al del caso anterior (la incertidumbre se resuelve al final del primer período).

El problema que resuelve el individuo es:

$$\begin{aligned} &max\ L = u(c_1) + \beta p[u(c_2^A) + \beta u(c_3^A)] + \beta(1-p)u(c_2^B) \\ &\lambda_A(y_1 - c_1 - \frac{c_2^A}{1+r} - \frac{c_3^A}{(1+r)^2}) + \lambda_B(y_1 - c_1 - \frac{c_2^B}{1+r}) \end{aligned} \tag{7}$$

Las CPO del problema son:

$$u'(c_1) - \lambda_A - \lambda_B = 0 \tag{8}$$

$$\beta p u'(c_2^A) - \frac{\lambda_A}{1+r} = 0 \tag{9}$$

$$\beta(1-p)u'(c_2^B) - \frac{\lambda_B}{1+r} = 0 \tag{10}$$

$$\beta^2 p u'(c_3^A) - \frac{\lambda_A}{(1+r)^2} = 0 \tag{11}$$

más las CPO respecto a los mulltiplicadores de Lagrange. Resolviendo las CPO del modo visto en clase, se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)[pu'(c_2^A) + (1-p)u'(c_2^B)] \tag{12}$$

o nuevamente de modo análogo

$$u'(c_1) = \beta(1+r)E[u'(c_2)] \tag{13}$$

Las ecuaciones (12) y (13) tienen la misma interpretación que las ecuaciones (5) y (6), y muestran un caso en que la incertidumbre aún no se resolvió. Sin embargo, en este caso hay una ecuación de Euler adicional, que vincula el consumo en el segundo período con el consumo en el tercer período:

$$u'(c_2^A) = \beta(1+r)u'(c_3^A) \tag{14}$$

Obsérvese que esta es una ecuación de Euler similar al caso de certidumbre. La razón para esto es que esta ecuación debe cumplirse LUEGO de que la incertidumbre se resolvió, es decir, luego del final del período 1, si es que se reveló que el individuo vivirá tres períodos.

3 Valuación de activos

El problema de valuación de activos se sitúa en la frontera de dos áreas de la macroeconomía: por una parte, el valor que los individuos le asignan a los diferentes activos depende de la utilidad que obtengan del consumo (los activos permiten transferir consumo en el tiempo). De este modo, la teoría de valuación de activos puede entenderse como una extensión de la teoría del consumo (lado de la demanda). Por otra parte, la creación de activos se hace mediante la inversión. De este modo la teoría de valuación de activos puede entenderse como una extensión de la teoría de la inversión (lado de la oferta).

En este apartado se utiliza el esquema desarrollado en las secciones anteriores para el desarrollo de la teoría de valuación de activos. Es decir, se entiende a la valuación de activos como una extensión del problema de decidir consumo en el tiempo. En particular, se estudiará el CAPM de consumo (CAPM por sus siglas en inglés, Capital Asset Pricing Model).

Supongamos que hay dos activos: uno libre de riesgo, con retorno cierto r, y otro riesgoso, cuyo retorno es una variable aleatoria z_i. En los desarrollos previos veníamos trabajando con un único activo de rendimiento cierto, y la condición necesaria para optimizar (ecuación de Euler) era

$$u'(c_t) = \frac{(1+r)}{(1+\rho)} E[u'(c_{t+1})] \tag{15}$$

donde ρ es la tasa de preferencia intertemporal (más conocida en el curso como "tasa de impaciencia").

Si se considera el activo cuyo retorno es aleatorio, la condición para óptimo es

$$u'(c_t) = \frac{1}{(1+\rho)} E[u'(c_{t+1})(1+z_i)] \tag{16}$$

Usando la propiedad de que la esperanza de una constante por una variable aleatoria es igual a la constante por la esperanza de la variable aleatoria, el término $(1+r)$ en (15) puede ir dentro de la esperanza y reescribimos

$$u'(c_t) = \frac{1}{(1+\rho)} E[u'(c_{t+1})(1+r)] \tag{17}$$

De (16) y (17) se obtiene

$$E[u'(c_{t+1})(1+z_i)] = E[u'(c_{t+1})(1+r)] \tag{18}$$

por lo que

$$E[u'(c_{t+1})(z_i - r)] = 0 \tag{19}$$

Recordemos la siguiente regla: dadas dos variables aleatorias x e y,

$$Cov(xy) = E(xy) - E(x)E(y)$$

por lo que

$$E(xy) = E(x)E(y) + Cov(xy)$$

Llamando $x = u'(c_{t+1})$ e $y = (z_i - r)$, y usando el hecho de que $Cov(u'(c_{t+1}), z_i - r) = Cov(u'(c_{t+1}), z_i)$[1] la aplicación de la regla anterior a (19) resulta en

$$0 = E[u'(c_{t+1})]E[(z_i - r)] + Cov(u'(c_{t+1}), z_i) \tag{20}$$

Usando $E(r) = r$, y reordenando, se obtiene la ecuación fundamental del CAPM de consumo:

$$E(z_i) = r - \frac{Cov(u'(c_{t+1}), z_i)}{E[u'(c_{t+1})]} \tag{21}$$

Analicemos tres casos:

Caso 1. $Cov(u'(c_{t+1}), z_i) < 0$: éste es el caso usual. Cuando esta covarianza es negativa entonces el activo tiene un alto rendimiento cuando la utilidad marginal del consumo es baja, es decir, cuando el consumo es alto (que, dada la hipótesis de utilidad marginal del consumo decreciente, es cuando menos utilidad marginal aporta). A su vez, el activo tiene un rendimiento bajo cuando la utilidad marginal del consumo es alta, es decir, cuando el consumo es bajo (que es cuando mayor utilidad marginal aporta). Por lo tanto, éste

[1] Esto último se debe a que r no es aleatoria, por lo que la covarianza entre r y cualquier variable aleatoria es cero, y también al hecho de que para cualesquiera variables x, y y z se tiene $Cov(x, y + z) = Cov(x, y) + Cov(y, z)$.

es un activo que añade riesgo al problema del individuo, y para que los individuos lo demanden debe ocurrir $E(z_i) > r$.

Caso 2. $Cov(u'(c_{t+1}), z_i) = 0$: el rendimiento del activo no covaría con la utilidad marginal del consumo (i.e. no hay relación lineal entre el rendimiento del activo y la utilidad marginal del consumo). Poseer este activo en cartera no añade riesgo, y por lo tanto el rendimiento que se le requiere para que en equilibrio su demanda sea positiva es equivalente al rendimiento del activo sin riesgo: $E(z_i) = r$.

Caso 3. $Cov(u'(c_{t+1}), z_i) > 0$: este caso es simétricamente opuesto al caso 3. El activo tiene un rendimiento alto cuando el consumo es bajo y viceversa. Poseerlo en cartera permite una disminución del riesgo en el sentido de que permite una mejor suavización intertemporal del consumo. En ese sentido el activo riesgoso es mejor que el activo sin riesgo, y por lo tanto el rendimiento que se le demanda es menor que el del activo libre de riesgo: $E(z_i) < r$.

El arbitraje en el mercado de activos debería asegurar el cumplimiento de la condición (21).

4 El enigma del premio al riesgo de las acciones

La referencia original para este tema es Mehra y Prescott ("The Equity Premium: A Puzzle", JME, 1985). El enigma del premio al riesgo de las acciones consiste en que el diferencial de rendimiento que pagan las acciones respecto a un activo libre de riesgo es excesivamente alto, en el sentido de que para que sea compatible con la teoría deberían tenerse individuos demasiado aversos al riesgo, mucho más que lo que los estudios empíricos sugieren.

Para analizar este fenómeno, partamos de la ecuación de Euler contemplando un activo riesgoso con rendimiento aleatorio z_i:

$$u'(c_t) = \frac{1}{(1+\rho)} E[u'(c_{t+1})(1+z_i)] \tag{22}$$

El término $u'(c_t)$ es no aleatorio, por lo que $E(u'(c_t)) = u'(c_t)$, pudiendo reescribirse la anterior ecuación como

$$1+\rho = E[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(1+z_i)] \tag{23}$$

Vamos a suponer que la función de utilidad toma una forma particular, conocida como la forma de aversión relativa al riesgo constante:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{24}$$

Puede mostrarse que σ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo constante,

$$\sigma = -\frac{cu''(c)}{u'(c)} \tag{25}$$

Cuanto más cóncava es la función de utilidad mayor es σ, es decir, mayor es el grado de aversión al riesgo. Obteniendo la utilidad marginal del consumo para la función postulada y reemplazando en (23), se obtiene

$$1+\rho = E[\frac{c_{t+1}^{-\sigma}}{c_t^{-\sigma}}(1+z_i)] \tag{26}$$

o equivalentemente

$$1+\rho = E[(\frac{c_{t+1}}{c_t})^{-\sigma}(1+z_i)] \tag{27}$$

Obsérvese que $\frac{c_{t+1}}{c_t} = 1 + g$, donde g es la tasa de crecimiento del consumo. Reemplazando,

$$1 + \rho = E[(1 + g)^{-\sigma}(1 + z_i)] \tag{28}$$

Tenemos que resolver (28). Para hacerlo, realizaremos una expansión de Taylor de segundo orden a la función $f(g, z_i) = (1 + g)^{-\sigma}(1 + z_i)$, sobre el punto (0,0).

$$\begin{aligned}&(1+g)^{-\sigma}(1+z_i) = f(g,z_i) = f(0,0) + f_g(0,0)(g-0) + f_z(0,0)(z_i-0) + \\ &\frac{1}{2}f_{gg}(0,0)(g-0)^2 + \frac{1}{2}f_{zz}(0,0)(z_i-0)^2 + f_{gz}(0,0)(g-0)(z_i-0)\end{aligned} \tag{29}$$

Tomemos las derivadas parciales necesarias para la expansión de Taylor (29) y evaluémoslas en (0,0):

$$f(0,0) = 1$$

$$f_g = -\sigma(1+g)^{-\sigma-1} = -\sigma$$

$$f_z = (1+g)^{-\sigma} = 1$$

$$f_{gg} = \sigma(\sigma+1)(1+g)^{-\sigma-2}(1+z_i) = \sigma(\sigma+1)$$

$$f_{zz} = 0$$

$$f_{gz} = -\sigma(1+g)^{-\sigma-1} = -\sigma$$

Sustituyendo en (29) y luego en (28):

$$\begin{aligned}1+\rho \quad &= E[1 - \sigma g + z_i + \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)g^2 - \sigma z_i g] \\ &= 1 - \sigma E(g) + E(z_i) + \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)E(g^2) - \sigma E(z_i g)\end{aligned} \tag{30}$$

Utilizando las fórmulas vistas previamente para la covarianza y la varianza, reemplazamos los términos $E(g^2)$ y $E(z_i g)$ y obtenemos:

$$1+\rho = 1-\sigma E(g)+E(z_i)+\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)(E(g)^2+var(g))-\sigma(E(z_i)E(g)+cov(g,z_i)) \tag{31}$$

Los términos $E(g)^2$ y $E(z_i)E(g)$ son usualmente muy pequeños, por lo que podemos despreciarlos. De este modo, la anterior expresión se torna

$$1+\rho = 1-\sigma E(g)+E(z_i)+\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)var(g)-\sigma cov(g,z_i) \tag{32}$$

Reordenando, se obtiene

$$E(z_i) = \rho+\sigma E(g)-\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)var(g)+\sigma cov(g,z_i) \tag{33}$$

La ecuación (33) tiene que cumplirse para cualquier activo, por lo que en particular también debe cumplirse para el activo libre de riesgo, que como da siempre el mismo rendimiento r su rendimiento no covaría con g:

$$r = \rho+\sigma E(g)-\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)var(g) \tag{34}$$

Restando (34) a (33) obtenemos una expresión para el premio al riesgo que paga el activo riesgoso (interpretable como el premio al riesgo de las acciones):

$$E(z_i)-r = \sigma cov(g,z_i) \tag{35}$$

Recordemos que el coeficiente de correlación se define como

$$corr(z_i,g) = \frac{cov(z_i,g)}{\sigma_z\sigma_g} \tag{36}$$

donde σ_z y σ_g son los desvíos estándar del rendimiento de las acciones y de la tasa de crecimiento del consumo, respectivamente. Usando el coeficiente de correlación, la expresión para el premio al riesgo puede escribirse como

$$E(z_i)-r = \sigma corr(g,z_i)\sigma_z\sigma_g \tag{37}$$

Para ver en qué consiste el enigma enunciado, utilicemos datos de la economía de Estados Unidos:

- el premio promedio de las acciones sobre el bono libre de riesgo es de 0,06 (seis por ciento);
- el desvío estándar de la tasa de crecimiento del consumo es 0,036;
- el desvío estándar del índice Dow Jones (representativo del rendimiento de las acciones) es 0,167;
- la correlación entre el índice Dow Jones y la tasa de crecimiento del consumo es de 0,4.

Usando estos datos en (37) se resuelve para σ, obteniéndose $\sigma = 25$ (!). Este valor es exageradamente alto de acuerdo a los valores estimados de σ que se han obtenido en la literatura (no superiores a 3). Es decir, el consumo no es lo suficientemente variable ni está tan correlacionado con el rendimiento de las acciones como para explicar un diferencial de rendimiento tan alto.

Hay un enigma relacionado con el del premio al riesgo que se conoce como "enigma de la tasa de interés libre de riesgo". Como se vio en clase, puede demostrarse que

$$g = \frac{r - \rho}{\sigma} \tag{38}$$

Supongamos que aceptamos que σ es igual a 25. Para una tasa de crecimiento del consumo del 2 por ciento y una tasa de impaciencia igual a cero, deberíamos obtener $r = 0,5$ para satisfacer (38). Es decir, la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo debería ser igual al 50 por ciento, un valor absurdamente alto.