Universidad Nacional de La Plata

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Macroeconomía Avanzada

Modelo Monetario de Generaciones Superpuestas

Huberto M. Ennis[1]

Trabajo Docente No. 6
Junio 2003

Estas notas de clase fueron escritas en mayo y junio de 2003 cuando el autor se desempeñaba como Profesor Invitado de la Maestría en Economía del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de la Plata.

[1] Economista del Banco de la Reserva Federal de Richmond, en Virginia, Estados Unidos.

Notas de Clase. Maestría en Economía. UNLP. Junio 2003.

Modelo Monetario de Generaciones Superpuestas

Profesor Invitado Huberto M. Ennis
Research Departement
Federal Reserve Bank of Richmond (USA)

En general una economía se define como un conjunto de agentes I, dotaciones $\{\omega_i\}_{i=1}^{I}$, tecnologías F y preferencias $\{U_i\}_{i=1}^{I}$. Es decir, una economía es una lista de elementos:

$$\left\langle I, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, F, \{U_i\}_{i=1}^{I} \right\rangle .$$

Una economía de intercambio (sin producción) es un conjunto:

$$\left\langle I, \{\omega_i\}_{i=1}^{I}, \{U_i\}_{i=1}^{I} \right\rangle .$$

Empezamos estudiando una versión del modelo de generaciones superpuestas que es un caso particular de esta economía de intercambio. La versión mas completa del modelo, con por ejemplo una tecnología dada por una función neoclásica de producción es también muy útil para estudiar preguntas relacionadas al crecimiento ecónomico. Aquí solo nos concentramos en cuestiones monetarias para lo cual es suficiente con una economía de intercambio.

La Economía.

Vamos a indexar la secuencia de eventos con el subíndice $t = 1, 2, ..., T$, y como nos interesa estudiar cuestiones monetarias necesitamos concentramos en el caso en que $T = +\infty$, como quedara claro mas adelante. En otras palabras el tiempo en esta economía es discreto y la economía dura para siempre. Antes de ir a las definiciones formales ensayemos una descripcion heurística del la economía que nos interesa estudiar. En cada período t, nacen $N(t)$ agentes que viven dos períodos. Notemos que esto implica que en cada período conviven en la economía agentes jóvenes (en su primer período de vida) y agentes viejos (en su segundo período de vida). Supondremos, para simplificar, que en la economía existe un único bien de consumo, perecedero (que solo dura un período). Es importante notar que esto limita las posibilidades de intercambio entre los agentes de esta economía en el sentido de que no hay razón para cambiar unos bienes por otros (manzanas por bananas, por ejemplo). La única razón por la cual los agentes van a desear interactuar con otros agentes es porque desean realizar intercambios intertemporales, es decir pasar la disponibilidad de bienes de consumo de un período a otro. Esto quedará mas claro cuando estudiemos el problema que enfrenta un agente típico de una generación. Cada agente nace con una dotación de bienes de consumo y tiene la posibilidad de interactuar con el resto de los agentes de esta economía. En definitiva, un agente jóven de la generación t (es decir, nacido en el período t) interactuará solamente con los agentes de su misma generación y con los agentes viejos de la generación anterior. Hay dos interpretaciones equivalentes para este hecho. La fundamental es que como veremos, esos son los agentes de esta economía que tienen interés en los mismos bienes (donde ahora interpretamos a los bienes como bienes de consumo en un determinado momento del tiempo o en otras palabras, manzanas el el período t son un bien de consumo distinto que manzanas en el período $t+1$).La otra interpretación es que el agente sólo interactua con aquellos agentes que están vivos en ese momento en la economía. En esta descripción abstracta de la economía, estar vivo en un período en particular es equivalente a valorar los bienes de consumo en ese período. Pasemos ahora a las definiciones formales de los elementos de esta economía. Se debe notar que el primer período de la economía es algo atípico. Para mantener uniformidad, vamos a suponer que la economía empieza con un grupo de agentes viejos viviendo en ella. Por lo tanto tenemos que en la economía de intercambio con generaciones superpuestas y horizonte infinito ($T = +\infty$) el conjunto I de agentes esta dado por $N(0)$ agentes viejos en el período $t = 1$, y $N(t)$ agentes en la generación t para $t = 1, 2, ...$ Las dotaciones son las siguientes: los agentes viejos del primer periodos tienen una dotación de bienes de consumo $\omega_0(1)$ y una cantidad $H(0)$ de papeles moneda (papeles sin valor intínseco pero con alguna característica especial que los identifica como papel moneda, como por ejemplo, el retrato de San Martín). Los agentes de la generacion t tienen una dotación de bienes de consumo $\omega_t(t)$ en el período t, cuando jóvenes, y una dotación $\omega_t(t+1)$ cuando viejos (notemos que el subíndice aquí indica la generación a la que pertenece el agente). Finalmente las preferencias de los agentes están dadas por las siguientes funciones de utilidad: para los agentes viejos en el período $t = 1$ suponemos que sólo desean maximizar $c_0(1)$ (es decir, su consumo) y para los agentes jóvenes de la generación t suponemos que tienen preferencias sobre los bienes de consumo en el período t y en el período $t + 1$ de acuerdo con la siguiente función de utilidad estrictamente creciente y cuasicóncava:

$$u_t[c_t(t), c_t(t+1)],$$

para $t = 1, 2, ...$ Es decir, $c_t(t)$ es el consumo del agente jóven de la generación t y $c_t(t+1)$ es el consumo del agente viejo de la generación t. Es importante notar que los $N(t)$ agentes de la generación t son todos idénticos entre si. Dada la simpleza de esta economía un contrato simple de préstamo de bienes presentes a cambio de bienes en el próximo período es suficiente para satisfacer los potenciales deseos de intercambio de los agentes en la economía. Definimos entonces como $l_t(t)$ la cantidad de contratos unitarios de préstamo real en los que participa un agente de la generación t, y $R(t)$ el retorno sobre dicho préstamo. En otras palabras, un agente de la generación t que participa en $l_t(t)$ contratos de préstamo con otro agente se compromete a proveer $l_t(t)$ bienes de consumo en el período t a cambio de $R(t)l_t(t)$ bienes de consumo en el período $t + 1$. En un equilibrio monetario, también existe la posibilidad de mantener dinero. Denominamos con $m_t(t)$ la cantidad de papel moneda que mantine el agente de la generación t desde el período t hasta el período $t + 1$. Otra vez notemos que como todos los agentes de una generación son idénticos entre si, es suficiente definir lo que hace uno de ellos (el agente representativo) para saber que hacen todos.

Equilibrio.

Una vez definidos los elementos de la economía, ahora necesitamos elegir un concepto de equilibrio, es decir, definir el equilibrio, y luego estudiarlo. Parte de la definición del equilibrio es el problema que enfrenta el agente representativo de la generación t que estudiamos a continuación. En el equilibrio que nos interesa estudiar los agentes en el período t toman como dado el retorno $R(t)$ y el precio de los bienes en términos de dinero $p(t)$. En otras palabras, el número de agentes es los suficientemente grande tal que cada agente percibe que sus deciciones no influenciaran los precios de mercado (competencia perfecta). Por lo tanto, el agente representativo de la generación resuelve el siguiente problema de optimización

$$\max \ u_t[c_t(t), c_t(t+1)]$$

sugeto a

$$c_t(t) + l_t(t) + \frac{m_t(t)}{p(t)} = \omega_t(t),$$

$$c_t(t+1) = \omega_t(t+1) + R(t)l_t(t) + \frac{m_t(t)}{p(t+1)},$$

$$c_t(t) \geq 0, c_t(t+1) \geq 0, m_t(t) \geq 0.$$

Es importante notar que los agentes en el período t necesitan predecir el valor de $p(t+1)$ para poder determinar cual es el rendimiento de mantener dinero como reserva de valor. El supuesto utilizado en este equilibrio es que los agentes poseen previsión perfecta, y por lo tanto predicen exactamente el valor futuro del nivel de precios. Es importante tener en cuenta este supuesto para la interpretación de muchos de los resultados que se presentan a coninuación. Los agentes viejos de la primera generación resuleven el siguiente problema

$$\max \ c_0(1)$$

sugeto a

$$c_0(1) = \omega_0(1) + \frac{H(0)}{p(1)}.$$

Definición de Equilibrio: Un equilibrio (con previsión perfecta) es un conjunto de secuencias de precios $(\{p(t)\}_{t=1}^{\infty}, \{R(t)\}_{t=1}^{\infty})$ y asignaciones $(c_0(1), \{c_t(t), c_t(t+1)\}_{t=1}^{\infty}, \{l_t(t)\}_{t=1}^{\infty}, \{m_t(t)\}_{t=1}^{\infty})$ tal que:
1) dados $(\{p(t)\}_{t=1}^{\infty}, \{R(t)\}_{t=1}^{\infty})$ la secuencias $(c_0(1), \{c_t(t), c_t(t+1)\}_{t=1}^{\infty}, \{l_t(t)\}_{t=1}^{\infty}, \{m_t(t)\}_{t=1}^{\infty})$ resuelven los problemas del agente definidos arriba.
2) los mercados de préstamos a un período y de dinero se limpian (se vacían).

Como todos los agentes jóvenes de una misma generación son idénticos, todos querrán: o demandar u ofrecer préstamos a un período, con lo cual no es posible que dos jóvenes de una generación firmen entre ellos uno de estos contratos. La otra posibilidad es que los jóvenes de la generación t intentaran firmar estos contratos con los viejos de la generación $t-1$. Sin embargo esto no es posible. Los contratos implican que los jóvenes de la generación t obtendrán de (o darán a) los viejos de la generación $t-1$ bienes en el período $t+1$, pero los viejos de la generación $t-1$ no participan de la economía en el período $t+1$ y por lo tanto estos contratos no son viables. Este argumento nos permite concluir que en equilibrio, el retorno sobre los préstamos a un período, $R(t)$, se debe ajustar tal que sea voluntario para los agentes elegir $l_t(t) = 0$ para todo t (es decir, que $l_t(t) = 0$ es parte de la solución del problema del agente).

En esta economía siempre existe un equilibrio no monetario, es decir un equilibrio en el que $p(t) = +\infty$ para todo $t = 1, 2, \ldots$. Los intercambios monetarios en esta economía involucran la siguiente transacción. El agente jóven de la generación t le cambian a los agentes viejos de la generación $t-1$ bienes de consumo por papel moneda sin valor intrínseco. La razón por la cual los agentes jóvenes están dispuestos a participar de tal transacción es que *confian* en que el próximo período, cuando viejos, podrán entrar en una transacción similar con los jóvenes del período $t+1$. Esta confianza en la aceptabilidad del dinero en el futuro es la única razón por al cual el dinero tiene valor en esta economía. Esta es la razón por la cual es necesario el supuesto $T = +\infty$ para estudiar cuestiones monetarias en esta economía. Si $T < +\infty$ es siempre el caso que $p(t) = +\infty$ en todo equilibrio. La razón es la siguiente: Los agentes jóvenes del período T no estarán dispuestos a aceptar papel dinero a cambio de bienes de consumo porque el papel dinero sólo tendría valor si pudiera ser usado para comprar bienes en el siguiente período, pero en $t = T$ no hay un siguiente período por definición de T. Sabiendo ésto, los agentes jóvenes en el período $T-1$ no estarán dispuestos a aceptar papel moneda a cambio de bienes de consumo porque el papel moneda no podrá ser utilizado para comprar bienes en el período T. Por inducción, esta lógica se aplica a todos los períodos y el dinero no tendrá valor en equilibrio. Una lógica similar nos permite demostrar el siguiente lemma: si $p(t) = +\infty$ para algun t, luego, $p(t) = +\infty$ para todo t.

En un equilibrio monetario de esta economía existen dos activos que le permiten a los agentes realizar el mismo intercambio intertemporal de bienes. Por lo tanto, se debe cumplir una *condición de no arbitraje*. En particular tenemos que en un equilibrio monetario se cumple que

$$R(t) = \frac{p(t)}{p(t+1)}.$$

Para demostrar ésto, despejamos $l_t(t)$ de la segunda restricción presupuestaria en el problema del agente y reemplazamos en la primera. Reordenando se obtiene:

$$c_t(t) - \omega_t(t) + \frac{c_t(t+1) - \omega_t(t+1)}{R(t)} = \left[\frac{p(t)}{p(t+1)}\frac{1}{R(t)} - 1\right]\frac{m_t(t)}{p(t)}.$$

En esta expresión vemos que si $p(t)/p(t+1) > R(t)$ el agente eligiría aumentar $m_t(t)$ hasta infinito (dados los precios $p(t)$) porque eso le permitiría aumentar sin límite los consumos (netos de dotación) en ambos períodos de su vida (el lado izquierdo de la ecuación). Notemos que el tipo de arbitraje que el agente enfrentando dichos precios realiza es el siguiente: toma prestados bienes de consumo usando el contrato de préstamo real a un período ($l_t(t)$) y los vende a cambio de papel moneda. Como la oferta per capita de dinero en la economía en el período t esta dada por,

$$h(t) = \frac{H(t)}{N(t)p(t)},$$

que es un número menor que infinito, tal situación no es compatible con un equilibrio monetario en el que se requiere que el mercado de dinero se limpie. Se debe notar que $p(t)/p(t+1)$ es la inversa de la tasa bruta de inflación y por lo tanto la condición $p(t)/p(t+1) > R(t)$ implica que el retorno de mantener dinero es mayor que la tasa de interés bruta que se necesita pagar para endeudarse en bienes (es decir, $R(t)$). Por ejemplo, si $R(t) > 1$, luego para que el retorno del dinero sea mayor que el retorno sobre los préstamos a un período en bienes $R(t)$, es necesario que haya deflación, de tal manera que una unidad de papel moneda compre mas bienes el próximo período (en comparación con el período corriente). Un arbitraje similar implica que los agentes eligirán no mantener dinero si $p(t)/p(t+1) < R(t)$. Pero como en un equilibrio monetario $p(t) < +\infty$ eso implica que $h(t) > 0$ y por lo tanto la oferta de dinero será mayor que la demanda de dinero (igual a zero), lo cual es otra situación incompatible con equilibrio. Dado que la condición de arbitraje se cumple podemos simplificar el problema del agente definiendo la siguiente variable auxiliar

$$s_t(t) \equiv l_t(t) + \frac{m_t(t)}{p(t)},$$

ya que ambas formas de ahorro deben tener el mismo retorno en equilibrio. De las condiciones de primer orden se obtiene una función de ahorro (marshalliana):

$$s_t(t) = f_t(\omega_t(t), \omega_t(t+1), R(t)).$$

Si el consumo en cada período de vida es un bien normal, la derivada primera de la función f_t con respecto al primer argumento ($\omega_t(t)$) es positiva y la derivada primera con respecto al segundo argumento ($\omega_t(t+1)$) es negativa. Si los bienes de consumo en ambos períodos son substitutos brutos, la derivada primera de la función f_t con respecto al tercer argumento es positiva. De ahora en adelante utilizamos estos supuestos. En otras palabras, consideramos el caso en el que la tasa de ahorro del agente representativo de la generación es una función creciente del rendimiento sobre el ahorro. Se debe notar que en principio $s_t(t)$ puede ser positiva o negativa. Como veremos, para que exista un equilibrio monetario se debe cumplir que $s_t(t)$ es positiva en equilibrio.

A continuación realizamos algunos supuestos simplificativos que no cambian la sustancia del análisis pero que simplifican notación. En particular, suponemos que $u_t(.) = u(.)$, $\omega_t(t) = \omega_1$ y $\omega_t(t+1) = \omega_2$ para todo t. También suponemos que $N(0)=1$ y que $N(t)=(1+n)N(t-1)$ para todo t, con n constante. Estos supuestos hacen que la estructura de la economía sea estacionaria. Bajo estos supuestos tenemos que la función de ahorro de los jóvenes de la generación t esta dada por

$$s_t(t) = f(R(t))$$

donde f ahora es una función que tiene como parámetros ω_1 y ω_2, entre otros. Ademas, $f' > 0$ de acuerdo con nuestros supuestos. Es útil estudiar en este momento una representación gráfica del problema de ahorro (positivo o negativo) que enfrenta el agente jóven dado un retorno $R(t)$. Si el punto de dotación (el par ordenado $(\omega_t(t), \omega_t(t+1))$ esta a la derecha del punto A, el agente jóven desea ahorrar a la tasa de retorno dada $R(t)$). (FIGURA 1)

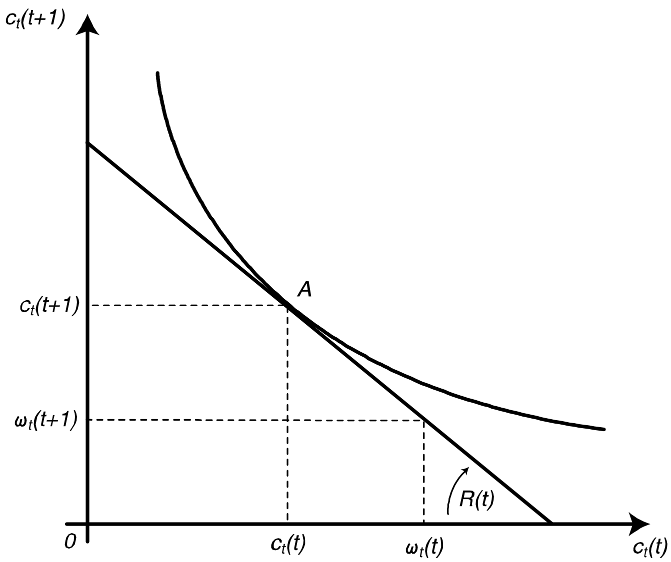

Figura 1

Como $l_t(t) = 0$ en equilibrio, para describir un equilibrio es suficiente con estudiar la siguiente equación de equilibrio monetario:

$$h(t) = f(R(t)).$$

En este sentido, podemos pensar que el modelo de generaciones superpuestas es una forma de disciplinar la construcción de la funcion f, es decir, la demanda de dinero en la economía. La forma de disciplinar tal construcción es la utilización de *microfundamentos*. Sin embargo, una vez obtenida la función f el análisis se reduce a estudiar la ecuación de equilibrio en el mercado monetario. Por ahora estamos suponiendo que no hay nueva creación de papel moneda, por lo tanto $H(t) = H(0)$ para todo t. Como la función f es monotona creciente es equivalente estudiar la ley de movimiento de $h(t)$ o la ley de movimiento de $R(t)$ (y por lo tanto de $p(t)$). Estudiamos entonces la ley de movimiento de

$h(t)$. Para ello primero notemos que como f es invertible tenemos que

$$R(t) = f^{-1}(h(t)).$$

y definamos la función ϕ como sigue

$$\phi(h(t)) = \frac{f^{-1}(h(t))}{1+n}$$

Luego tenemos que

$$h(t) = \frac{H(t)}{N(t)p(t)} = \frac{R(t-1)}{1+n}h(t-1) = \phi(h(t-1))h(t-1),$$

donde utilizamos la equación de equilibrio para substituir $R(t-1)$ por $f^{-1}(h(t-1))$. Esta expresión implica que en equilibrio la variable $h(t)$ obedece una ecuación en diferencias de primer orden:

$$h(t) = \phi(h(t-1))h(t-1).$$

Esta ecuación en diferencias de primer orden tiene dos soluciones estacionarias: (1) $h(t) = 0$ para todo t que es el equilibrio no monetario ($p(t) = +\infty$ para todo t) que discutimos anteriormente, y (2) $h(t-1) = h(t) = \bar{h}$ tal que $\phi\left(\bar{h}\right) = 1$ o en forma equivalente, $\bar{h}$ tal que $R(t) = \bar{R} = f^{-1}(\bar{h}) = 1+n$. En el caso del equilibrio no monetario tenemos que $R(t) = \widetilde{R} = f^{-1}(0)$, que es la tasa de retorno tal que los agentes eligen consumir sus dotaciones (autarquía).

Si se cumple que $f(1+n) < 0$, como $h(t) \geq 0$ para todo t tenemos que no hay un equilibrio monetario estacionario en la economía. Notemos que, por supuesto, la condición $f(1+n) < 0$ depende del punto de dotación (ω_1, ω_2) porque la forma de f depende de tal punto (ver la FIGURA 1). De hecho existe un resultado aún mas fuerte: cuando $f(1+n) < 0$ no equiste ningún equilibrio monetario, ya sea estacionario o no estacionario. Para ver que esto es verdad, primero notemos que como $c_t(t) \geq 0$ tenemos que

$$c_t(t) = \omega_t(t) - s_t(t) \geq 0,$$

y por lo tanto $s_t(t) \leq \omega_t(t) = \omega_1$ o en otras palabras la función f es acotada de arriba. Ahora, si $h(1) > 0$ luego $h(1) = f(R(1)) > 0$ y por lo tanto $R(1) > 1+n$. Pero en equilibrio $h\,(2) = [R(1)/\,(1+n)]\,h(1)$ y por lo tanto $h(2) > h(1)$. Luego $R(2) > R(1)$ y h es creciente (a tasa creciente) en el tiempo y por lo tanto h alcanzará el nivel ω_1 en tiempo finito, lo cual implica que tal situación no puede ser parte de un equilibrio.

Como estamos interesados en estudiar preguntas monetarias, suponemos en lo que sigue que se cumple la siguiente condición Samulesoniana $f(1+n) > 0$. Como la función f es creciente tenemos que $f(\widetilde{R}) = 0$ implica que $\widetilde{R} < 1+n$. Definimos ahora la función auxiliar $G(h(t-1)) \equiv \phi(h(t-1))h(t-1)$. Tenemos que

$$G'(h(t-1)) = \phi'(h(t-1))h(t-1) + \phi(h(t-1))$$

que es positiva. También tenemos que $G'(0) = \phi(0) = \widetilde{R}/(1+n) > 0$ pero < 1. Por lo tanto, podemos graficar la ley de movimiento de $h(t)$ como sigue: (FIGURA 2).

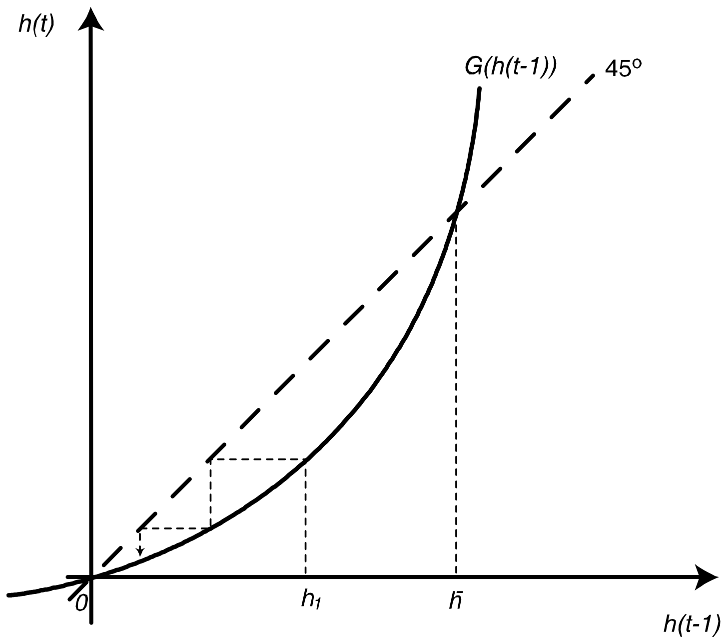

Figura 2

Existe entonces un contínuo de equilibrios monetarios indexados por el nivel de precios inicial $p(1)$. El equilibrio monetario estacionario es el equilibrio monetario en el que

$$p(1) = \bar{p} = \frac{H(0)}{(1+n)f(1+n)}.$$

Luego existen un contínuo de equilibrios monetarios no estacionarios indexados por $p(1) \in [\bar{p}, \infty)$. Notemos ahora que en un equilibrio monetario no estacionario $p(t) \to \infty$. Como $h(t) = f(R(t)) \to 0$ tenemos que $R(t)$ es decreciente en el tiempo o, en otras palabras, la inflación es creciente en el tiempo en el equilibrio monetario no estacionario. Formalmente, se cumple que:

$$R(t) = \frac{p(t)}{p(t+1)} = \frac{1}{1+\pi(t+1)} \to \widetilde{R} \text{ cuando } t \to \infty.$$

Resulta útil a esta altura pensar qué es lo que esta sucediendo en los equilibrios monetarios no estacionarios. Es importante para ello recordar que estamos usando el supuesto de previsión perfecta. Los agentes jóvenes en el período t esperan que los agentes jóvenes en el período $t+1$ estarán dispuestos a intercambiar bienes por dinero de acuerdo con el nivel de precios $p(t+1)$. Claramente ésto determina el retorno de aceptar dinero a cambio de bienes en el período t ya que ese dinero es aceptado en t con la intención de ser usado en $t+1$ para comprar bienes. Ahora bien, dado que los agentes jóvenes en t esperan que el nivel de precios en $t+1$ sea $p(t+1)$, ellos están dispuestos a demandar dinero a un precio $p(t)$ que es consistente con la "limpieza" del mercado de dinero. Para justificar que los agentes jóvenes en el período $t+1$ estén dispuestos a aceptar dinero al nivel de precios $p(t+1)$ es necesario pensar en los agentes jóvenes en el período $t+2$, y asi sucecivamente, ad infinitum. Este razonamiento resalta la importancia de las expectativas (o previsión perfecta) en la solución de equilibrio del modelo. Finalmente notemos que como la cantidad de dinero está dada en la economía (es igual a $H(0)$) tenemos que si el nivel de precios esta aumentando es necesario que la demanda de dinero (saldos reales) este disminuyendo para mantener el mercado de dinero en equilibrio, y por lo tanto, la tasa de retorno sobre el dinero debe estar disminuyendo en el tiempo (ya que la demanda de dinero es una función monótona de la tasa de retorno).

Ejercicio 1: Mostrar que cuando $\omega_2 = 0$ y $u(c_1, c_2) = \ln c_1 + \ln c_2$ tenemos que $\widetilde{R} = 0$ y la tasa de inflación en los equilibrios no monetarios crece sin límite. Podemos interpretar esta situación como una situación hiperinflacionaria.

Finalmente notemos que en el equilibrio monetario estacionario hay deflación porque

$$R(t) = \bar{R} = \frac{1}{1+\bar{\pi}} = 1 + n > 1.$$

Optimalidad.

Existe una relación estrecha entre las condiciones que implican que existe un equilibrio monetario y las condiciones que determinan que el equilibrio no monetario no es óptimo. En particular, si $\widetilde{R} < 1+n$ el equilibrio no monetario no es Pareto óptimo (hay otra asignación de consumo en la economía que no disminuye la utilidad de ningún agente de la economía y aumenta la utilidad de al menos uno). Esta condición es de hecho la condicion samuelsoniana que como se vio es necesaria para la existencia de un equilibrio monetario. En resumen, para que exista un equilibrio monetario, el equilibrio no monetario debe no ser Pareto óptimo. Ahora demostramos que cuando $\widetilde{R} < 1+n$ el equilibrio no monetario no es Pareto óptimo. Para demostrar este resultado es importante identificar la condición de factibilidad de las asignaciones de consumo para un período t dado. La condición de factibilidad nos dice que en un determinado período no se puede consumir más que la cantidad de bienes de consumo disponibles en tal período. Una forma de pensar en este conjunto de asignaciones, es decir el conjunto de asignaciones factibles, es pensar que los agentes entregan sus dotaciones a un planificador central y que éste decide como asignar el consumo dada la cantidad de bienes de consumo existente. En términos formales, la condición de factibilidad en el período t está dada por

$$N(t)c_t(t) + N(t-1)c_{t-1}(t) \leq N(t)\omega_1 + N(t-1)\omega_2$$

El lado derecho de la expresión es el total de consumo en la economía en el período t y el lado izquierdo es el total de bienes disponibles. Cualquier asignación de consumo $\{c_t(t), c_{t-1}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ que satisface la condición de factibilidad es una asignación posible en esta economía y se la llama factible. Como la utilidad de los agentes es estríctamente creciente en el consumo cualquier asignación Pareto óptima debe satisfacer la condición de factibilidad con igualdad. Consideremos un equilibrio no monetario en el que $\widetilde{R} < 1 + n$. Llamemos a la asignación de consumo en tal equilibrio como sigue:

$$c_0(1) = c_0, c_t(t) = c_1, c_{t-1}(t) = c_2.$$

Notemos que como se trata de una asignación de equilibrio se cumple que

$$\frac{\frac{du}{dc_1}}{\frac{du}{dc_2}} = \widetilde{R} < 1 + n$$

Ahora consideremos la siguiente asignación de consumo alternativa

$$c_0(1) = c_0 + (1+n)\delta, c_t(t) = c_1 - \delta, c_{t-1}(t) = c_2 + (1+n)\delta,$$

donde δ es un número positivo pequeño. Claramente el agente viejo de la generación 0 obtiene mayor utilidad con ésta segunda asignación. El agente de la generación t también obtiene mayor utilidad porque

$$du = \frac{du}{dc_1}dc_1 + \frac{du}{dc_2}dc_2 = \frac{du}{dc_1}(-\delta) + \frac{du}{dc_2}(1+n)\delta = \left(\frac{du}{dc_2}(1+n) - \frac{du}{dc_1}\right)\delta > 0$$

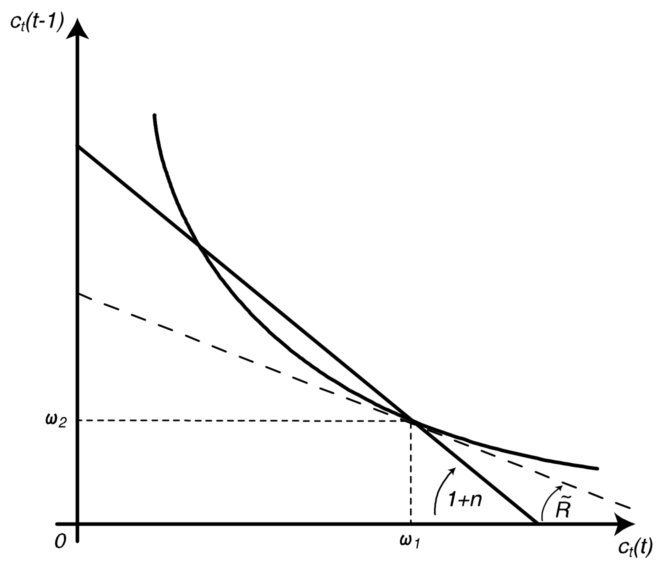

Figura 3

A continuación demostramos que además la asignación alternativa es factible y, por lo tanto, Pareto mejor que la asignación en el equilibrio no monetario. Para ello sólo se necesita corroborar la condición de factibilidad (recordando que $N(0) = 1$):

$$[c_0 + (1+n)\delta] + (1+n)[c_1 - \delta] = c_0 + (1+n)c_1 = \omega_0 + (1+n)\omega_1$$

para $t = 1$ y

$$N(t)\,[c_1 - \delta] + N(t-1)\,[c_2 + (1+n)\delta] = N(t)c_1 + N(t-1)c_2 = N\,(t)\,\omega_1 + N(t-1)\omega_2.$$

La Figura 3 muestra el conjunto de asignaciones factibles y también como la asignación en un equilibrio no monetario no resulta ser Pareto óptima si $\widetilde{R} < 1+n$.

Para finalizar, cabe señalar que el equilibrio monetario de estado estacionario es Pareto óptimo y que en este sentido el dinero cumple un rol como mecanismo que tiende a aumentar el bienestar de todos los agentes de la economía, es decir, lo que Samuleson llamó la *contribución social del dinero* ("the social contrivance of money").

Gobierno, Dominancia Fiscal y Señoreage.

Consideramos ahora el caso en el que en la economía también existe un gobierno manteniendo un déficit per capita constante en el tiempo y que se monetiza. La restricción presupuestaria del gobierno es entonces:

$$\frac{H(t) - H(t-1)}{p(t)} = D(t) = N(t)d$$

donde d es el déficit per capita, que como se dijo es constante. La intuición asociada con la monetización del déficit es la siguiente: En el modelo sin gobierno los agentes jóvenes de la generación t tienen una demanda de saldos reales $m_t(t)/p(t)$ en el sentido que están dispuestos a intercambiar bienes de consumo por papel moneda (sin valor intrínseco). Ahora, parte de esa demanda de dinero y, por lo tanto, parte de esos bienes de consumos que son intercambiados por dinero, son absorbidos por el gobierno, que emite nuevas unidades de papel moneda para intercambiarlas con los agentes jóvenes. La demanda de dinero de los agentes jóvenes no cambia, sólo cambia la condición de equilibrio en el mercado monetario. Para estudiar la dinámica del equilibrio procedemos como antes operando para obtener una ecuación en diferencias para la variable $h(t)$. Usando la restricción presupuestaria del gobierno tenemos que:

$$\frac{H(t)}{N(t)p(t)} - \frac{p(t-1)}{p(t)}\frac{H(t-1)}{N(t-1)p(t-1)}\frac{1}{1+n} = \frac{D(t)}{N(t)} = d,$$

es decir,

$$h(t) = \frac{R(t-1)}{1+n}h(t-1) + d, \tag{1}$$

y usando la condición de equilibrio en el mercado de dinero obtenemos que:

$$h(t) = \phi(h(t-1))h(t-1) + d.$$

La primera cosa para notar es que no existe un equilibrio no monetario (estacionario) en el cual el gobierno pueda financiar un déficit positivo a través de monetización. La lógica de este resultado es casi trivial: si el dinero no tiene valor, no es posible que el gobierno acceda a $N(t)d$ bienes de consumo en el período t usando papel moneda únicamente. Si recordamos el análisis previo de equilibrio, teníamos que $G(h(t-1)) = \phi(h(t-1))h(t-1)$ y que $G(0) = 0$. Por lo tanto, ahora tenemos que cuando $h(t-1) = 0$ en equilibrio se cumple que $h(t) = d$. Esto nos permite graficar nuevamente la condición de equilibrio

$$h(t) = G(h(t-1)) + d$$

donde ahora la función en el lado izquierdo de esta expresión tiene una ordenada al origen positiva (FIGURA 4).

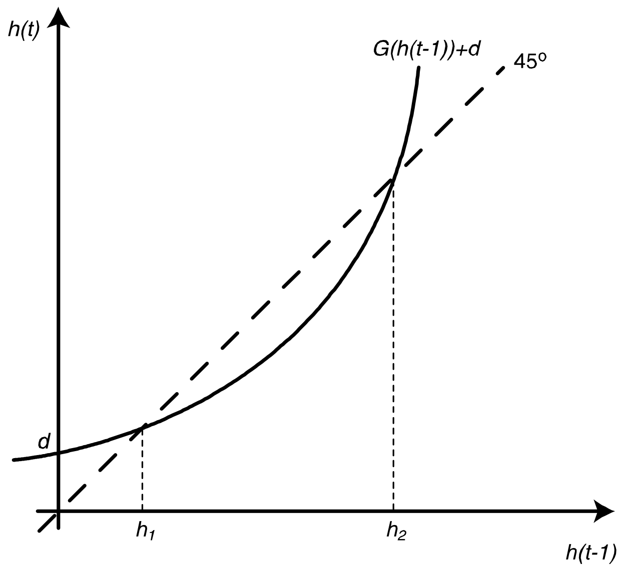

Figura 4

Notamos que existen ahora dos equilibrios monetarios estacionarios, $h(t) = h_1$ para todo t y $h(t) = h_2$ para todo t. Notemos que se cumple que:

$$h_1 = f(R_1) < h_2 = f(R_2),$$

y como f es una función estríctamente creciente, que $R_1 < R_2$. Por lo tanto la inflación de equilibrio satisface que $\pi_1 > \pi_2$ donde como se vió anteriormente $R_i = 1/(1 + \pi_i)$ para $i = 1, 2$. Este resultado es interesante porque nos dice que en el presente modelo existen dos niveles distintos de inflación estacionaria asociados con el mismo nivel de monetización del déficit del gobierno.

Para interpretar este resultado, es importante notar que en el equilibrio que estamos estudiando el gobierno no elije la cantidad de dinero a ser emitida. Dado un nivel de precios y una cantidad de déficit presupuestario real per capita dada d el gobierno emite suficiente cantidad de dinero como para monetizar el déficit. En este sentido, la política fiscal domina a la política monetaria (*dominancia fiscal*). Pero se debe notar también que esta forma de pensar en el equilibrio también determina la existencia de dichos equilibrios. Si por ejemplo pensáramos que el gobierno determina la cantidad de dinero a emitir y luego, de acuerdo con el nivel de precios, se determina cuanto defícit publico se puede financiar creando dinero (o en otras palabras, si el déficit per capita pasa a ser la variable endógena), tenemos que otra vez existirá un equilibrio no monetario donde el nivel de déficit monetizable es necesariamente igual a cero.

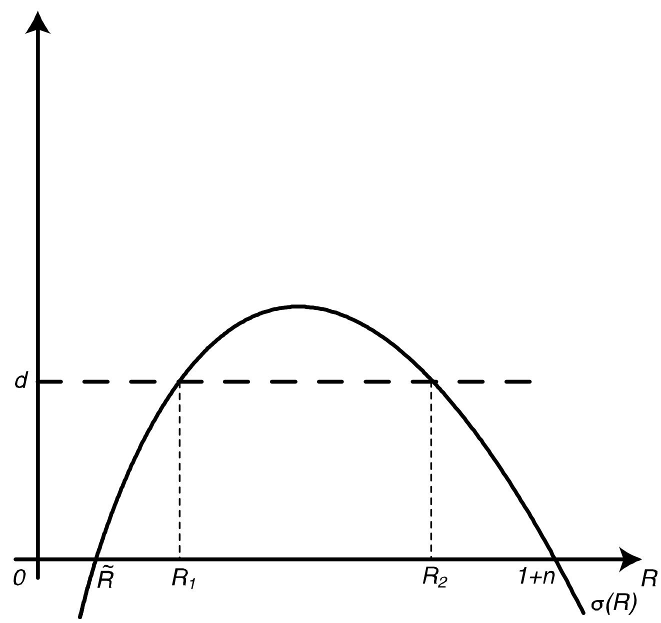

Figura 5

Utilizando la equación (1) y sabiendo que en un equilibrio estacionario se cumple que $h = f(R)$, podemos definir el señoreage de estado estacionario como:

$$\sigma(R) = (1 - \frac{R}{1+n})f(R).$$

El resultado anterior nos dice que existen dos niveles de inflación distintos asociados con el mismo nivel de señoreage estacionario. Además, notemos que para obtener señoreage positivo se requiere que $R < 1 + n$ con lo cual si $n > 0$ se cumple que es posible tener un equilibrio estacionario con señoreage positivo y $R = 1/(1 + \pi) > 1$, o en otras palabras, con inflación $\pi \leq 0$. Es decir, cuando la economía esta creciendo es posible mantener un señoreage positivo sin tener inflación. ¿Porqué decimos que cuando n es mayor que cero la economía esta creciendo? La respuesta es clara: Cada generación tiene $n \times 100$ por ciento más de agentes y cada agente nace con una dotación de ω_1 bienes, por lo tanto, con cada nueva generación la economía es su conjunto adquiere acceso a una mayor cantidad de bienes, o en otras palabras, crece. En el caso particular en el que $n = 0$ la única forma de monetizar un déficit positivo es creando inflación.

Es fácil comprobar que la curva $\sigma(R)$ tiene la forma de una joroba (FIGURA 5). Si tomamos la derivada primera de la función σ con respecto a R obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{dR} = -\frac{f(R)}{1+n} + \left(1 - \frac{R}{1+n}\right) f'(R).$$

Cuando R es cercana a cero la curva σ tiene pendiente positiva y cuando R es cercana a $1+n$ la curva tiene pendiente negativa. Existe, por lo tanto, un valor intermedio de R (y por tanto de inflación π) que maximiza la cantidad de señoreage en un equilibrio estacionario. En este sentido podemos decir que la función σ constituye un caso particular de la *Curva de Laffer*.

Además, se puede demostrar que el nivel de precios asociado con el estado estacionario en el que el retorno sobre el dinero esta dado por R_1 es, para todo t, más alto que el nivel de precios asociado con el estado estacionario R_2 (otra vez, las expectativas de los agentes sobre la evolución futura del nivel de precios de equilibrio juega un rol fundamental en la interpretación de este resultado).

Cuando el retorno del dinero se encuentra entre los valores R_1 y R_2 la economía está en lo que se llama el *slippery side* de la curva. Esto es así porque cuando $R(t) \in (R_1, R_2)$ se cumple que en equilibrio $R(t) \to R_1$ y por lo tanto $\pi(t)$ es creciente en el tiempo. Para entender que está sucediendo en este tipo de equilibrio no estacionario, notemos que si $R(t-1) \in (R_1, R_2)$ se cumple que:

$$\frac{R(t-1)}{1+n} h(t-1) + d < f(R(t-1)),$$

o, en palabras, como el gobierno necesita financiar un déficit d, con una demanda de dinero constante $h(t-1) = f(R(t-1))$ sucedería que habría un exceso de señoreage, lo cual es inconsistente con equilibrio. Por lo tanto, la cantidad demandada de dinero debe estar bajando en equilibrio para que el señoreage sea menor. Es decir, $R(t)$ debe ser menor que $R(t-1)$ y la inflación debe estar subiendo. Es interesante notar que, en cierta forma, la inflación de equilibrio está subiendo para que disminuya el señoreage. Esto puede parecer contraintuitivo pero tiene que ver con el hecho de que la demanda de dinero depende de la inflación esperada y que los sucesivos aumentos de inflación disminuyen la demanda de dinero más que lo que el aumento de precios disminuye la oferta real corriente de dinero.

Inflación, Superneutralidad y Crítica de Lucas.

Consideramos ahora una política monetaria-fiscal en la que el gobierno emite nuevas unidades de papel moneda a una tasa constante en el tiempo y las distribuye en forma de transferencias de dinero a los viejos del período corriente. Formalmente tenemos que

$$H(t) = zH(t-1),$$

con $z > 1$ y la restricción presupuestaria del gobierno esta dada por:

$$-N(t-1)\tau_{t-1}(t) = \frac{H(t) - H(t-1)}{p(t)},$$

donde $\tau_{t-1}(t)$ es la transferencia en dinero a los viejos del período t. Para el período $t = 1$ tenemos que:

$$\tau_0(1) = \frac{H(0)}{N(0)p(1)}.$$

Por lo tanto un equilibrio puede describirse con las siguientes ecuaciones:

$$-\tau_{t-1}(t) = (z-1)h(t-1)\frac{p(t-1)}{p(t)},$$

y

$$h(t-1) = f(R(t-1), \tau_{t-1}(t)).$$

En el estado estacionario, la tasa bruta de inflación esta dada por $z/(1+n)$. Para demostrar este resultado comenzamos con la condición de estado estacionario que implica que:

$$\frac{H(t-1)}{N(t-1)p(t-1)} = \frac{H(t)}{N(t)p(t)},$$

y reemplazando la ley de movimiento de la cantidad de dinero $H(t) = zH(t-1)$ tenemos que para todo t se cumple:

$$(1+n)\frac{p(t)}{p(t-1)} = z,$$

es decir que

$$1 + \pi \equiv \frac{p(t)}{p(t-1)} = \frac{z}{1+n}.$$

Un caso interesante es el caso en el que $n = 0$. En este caso la tasa de inflación en estado estacionario es igual a la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero, un resultado que en la literatura suele aparecer asociado con la *superneutralidad del dinero*. Sin embargo, aquí como la inflación afecta la tasa de retorno sobre el ahorro y por lo tanto la asignación de consumo de equilibrio, decimos que el dinero no es superneutral en este modelo.

En lo que sigue, demostramos que en equilibrio la cantidad real de dinero es una función muy específica de la tasa de inflación esperada y que depende en una forma fundamental del tipo de política monetaria que se esté desarrollando. Este resultado puede entenderse como un caso particular de *la crítica de Lucas* a los modelos macroeconométricos estructurales. La idea de Lucas es más general pero puede ilustrarse claramente con el caso que estamos estudiando aquí. En los años setenta era práctica común estimar una demanda de saldos reales como función de la tasa de inflación esperada (o una proxi de tal variable) usando datos históricos. Esta estimación luego se utilizaba para evaluar las posibles consecuencias de cambios en la política monetaria. Lucas señalo que tal demanda de saldos reales es, en realidad, una forma reducida de una relación de equilibrio entre los saldos reales y la tasa de inflación y que, en principio, es esperable que tal realción sea estadísticamente inestable ante cambios de política. En tal sentido, resultará incorrecto evaluar un cambio de política suponiendo que la relación entre la cantidad de saldos reales y la tasa de inflación esperada se mantendrá estable. A continuación demostramos que en el modelo de generaciones superpuestas se cumple que la cantidad de saldos reales de equilibrio es una función específica de la tasa de inflación esperada y que tal forma funcional depende directamente de la forma en que se realiza la política monetaria. Para ello nos concentramos en el caso en el que la función de utilidad de los agentes es logarítmica separable (ver Ejercicio 1). En el estado estacionario la tasa bruta de inflación esperada π^e esta dada por $z/(1+n)$. En el caso en el que el gobierno introduce nuevo dinero a travéz de transferencias de dinero a los viejos de cada generación tenemos que, en equilibrio,

$$h(t) = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2 - \tau_t(t+1)}{2R(t)} = \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2 + (z-1)R(t)h(t)}{2R(t)},$$

y entonces, en estado estacionario, se cumple que:

$$h = \frac{1}{1+\pi^e(1+n)} \left[\omega_1 - \omega_2 \pi^e\right].$$

Por otro lado, cuando el gobierno emite dinero a la misma tasa pero con el objetivo de financiar gasto público improductivo tenemos que la restricción presupuestaria del gobierno está dada por:

$$G(t) = (z-1)h(t-1)R(t-1),$$

y en el estado estacionario se cumple que:

$$h = \frac{1}{2}\left[\omega_1 - \omega_2 \pi^e\right].$$

Podemos ver entonces que en este ejemplo la relación entre la cantidad de saldos reales de estado estacionario y la tasa de inflación esperada depende en forma fundamental de la política económica. En el caso en el que el gobierno financia gasto público improductivo dicha relación es lineal y en el caso en el que el gobierno financia trasferencias a los viejos la relación es claramente no lineal.

Profesías Autocumplidas y Sunspots.

Cass y Shell formalizaron por primera vez la idea de que el proceso de formación de expectativas de los agentes puede resultar en equilibrios donde las variables de la economía se encuentran influenciadas por eventos que no necesariamente influencian los fundamentales de la economía. Azariadis desarrolló esta idea en el modelo monetario de generaciones superpuestas. A continuación se presenta una versión simplificada de dichos resultados.

Para simplificar notación suponemos que $H(t) = H(0) = 1$ para todo t, que $N(0) = 1$ y $n = 0$ y que $\omega_2 = 0$ (que nos garantiza que se cumple la condición samuelsoniana). Además suponemos que la función de utilidad de los agentes es separable, es decir

$$u_t\left[c_t(t), c_t(t+1)\right] = v(c_t(t)) + u(c_t(t+1)),$$

donde las funciones v y u son funciones estrictamente crecientes, cóncavas y diferenciables. Recordemos que en equilibrio tenemos que se cumple la siguiente ecuación de limpieza del mercado de dinero:

$$h(t) \equiv \frac{1}{p(t)} = \frac{m_t(t)}{p(t)} \equiv s_t(t),$$

donde $s_t(t)$ satisface la condición de primer orden del problema del agente, en este caso dada por:

$$v'(\omega_1 - s_t(t)) = u'(R(t)s_t(t))R(t). \tag{2}$$

Notemos ahora que en equilibrio se cumple que:

$$R(t) = \frac{p(t)}{p(t+1)} = \frac{h(t+1)}{h(t)},$$

por lo que podemos reescribir la ecuación (2) como sigue:

$$v'(\omega_1 - h(t))h(t) = u'(h(t+1))h(t+1).$$

Ésta es una ecuación en diferencias de primer orden en $h(t)$ que describe la evolución de la variable $h(t)$ en equilibrio y que fue representada (por ejemplo) en la Figura 2. Definimos ahora las siguientes dos funciones auxiliares:

$$G(x) = v'(\omega_1 - x)x \text{ y } U(x) = u'(x)x.$$

Notemos que la función $G(x)$ es estrictamente creciente. Tenemos entonces que un equilibrio de previsión perfecta puede ser descritpo por la ecuación en diferencias de primer orden:

$$G(h(t)) = U(h(t+1)).$$

Un equilibrio monetario de estado estacionario esta dado por el valor $\bar{h} \geq 0$ que soluciona $G(\bar{h}) = U(\bar{h})$.

La idea ahora es construir un equilibrio de esta economía donde el valor de la variable $h(t)$ este influenciada por la evolución de una variable aleatoria exógena que no tiene efectos en ninguna de las características fundamentales de la economía (como las preferencias, las dotaciones, etc.). El objetivo es demostrar que el modelo de generaciones superpuestas admite la construcción de equilibrios donde las asignaciones de consumo y las otras variables de la economía pueden fluctuar en el tiempo al ser influenciadas por el proceso de formación de expectativas de los agentes, sin que los fundamentales de la economía fluctúen. Para demostrar que esto es posible, es suficiente con la construcción de un ejemplo. Para ello, consideramos un tipo de variable aleatoria exógena (*sunspot*) que resulta muy conveniente: una variable aleatoria con una estructura de Markov simple (es decir que la distribución de probabilidad de la variable aleatoria en el período t depende sólo de la realización de tal variable en el período $t-1$). En particular, suponemos que existe una variable aleatoria $\eta(t)$ que toma valores en el conjunto $\{\eta_1, \eta_2\}$ tal que $\Pr[\eta(t) = \eta_i \mid \eta(t-1) = \eta_i] = q$ para $i = 1$, 2. Ahora, si los agentes forman sus expectativas contingentes a la realización de la variable $\eta(t)$ sucederá que las acciones de los agentes, y por lo tanto el equilibrio de la economía, se moverá de acuerdo a la realización de tal variable.

En resumen, y como para describir el equilibrio de la economía es suficiente con describir el compartamiento de la variable $h(t)$, tenemos que, en equilibrio, la variable $h(t)$ se comportará como una variable aleatoria Markov. En consequencia, en un equilibrio con "efectos sunspot" la variable $h(t)$ toma uno de dos valores, h_1 o h_2, donde h_i es el valor de la cantidad de saldos reales de equilibrio asociado con el estado η_i de la variable sunspot, para $i = 1$, 2. En tal equilibrio, la probabilidad condicional de la variable h está dada por $\Pr[h(t+1) = h_i \mid h(t) = h_i] = q$ para $i = 1, 2$, y la matriz de probabilidades de transición de Markov está dada por la siguiente tabla:

Pr	$h(t+1) = h_1$	$h(t+1) = h_2$
$h(t) = h_1$	q	$1-q$
$h(t) = h_2$	$1-q$	q

En general, hasta ahora, estudiamos el caso de previsión perfecta; la inclusión de efectos sunspot implica que necesitamos ampliar el análisis y considerar el caso en que el agente resuleve su problema de decisión (y ahorro) sin saber con certeza el rendimineto de mantener dinero. Como vimos, el retorno de mantener dinero esta dado por $R(t) = h(t+1)/h(t)$ y por lo tanto tenemos que en el momento t se cumple que $\Pr[R(t) = 1] = q$, y que $\Pr[R(t) = h_j/h_i \mid h(t) = h_i] = 1-q$. El problema del agente se puede escribir como sigue:

$$\max_{s_t(t)} v\left(\omega_1 - s_t(t)\right) + E_{R(t)}\left[u\left(R(t)s_t(t)\right)\right]$$

y la condición necesaria de primer orden implica la siguiente ecuación de equilibrio

$$v'\left(\omega_1 - h(t)\right) = E_{h(t+1)}\left[u'\left(h(t+1)\right)\frac{h(t+1)}{h(t)}\right]$$

que la podemos reescribir como un sistema de dos equaciones en tres incognitas (h_1, h_2 y q):

$$v'\left(\omega_1 - h_1\right) = qu'\left(h_1\right) + (1-q)u'\left(h_1\right)\frac{h_2}{h_1},$$

$$v'\left(\omega_1 - h_2\right) = (1-q)\,u'\left(h_1\right)\frac{h_1}{h_2} + qu'\left(h_2\right),$$

o en forma reducida:

$$G(h_1) = qU(h_1) + (1-q)U(h_2), \tag{3}$$

$$G(h_2) = (1-q)U(h_1) + qU(h_2). \tag{4}$$

Este sistema en general tiene múltiples soluciones. Un caso particular (y por supuesto, obvio) es el caso en el que $h_1 = h_2 = \bar{h}$, que resulta ser el estado estacionario del modelo sin sunspots.

Ejercicio 2: Si *(i)* U es una función creciente de h, o si *(ii)* U es decreciente y $q > 1/2$, demostrar que se cumple que no existe un equilibrio con aleatoriedad extrínseca (o efectos sunspot). Ver Azariadis (1981).

Lo que buscamos es un vector (h_1, h_2, q) que solucione el sistema de ecuaciones (3) y (4), tal que $q \in [0,1]$ y $h_1 \neq h_2$. Como el sistema es completamente simétrico con respecto a los subíndices podemos asumir sin pérdida de generalidad que $h_2 > h_1$ (en el caso opuesto, todos los razonamientos serían equivalentes luego de reindexar). Dado que el Ejercicio 3 nos dice que cuando la función U es creciente no existe una solución como la que estamos buscando, nos restringimos al caso en que U es decreciente. Por lo tanto tenemos que $U(h_2) < U(h_1)$.

La restricción sobre la variable q (es decir, $q \in [0,1]$) se origina en que q representa una probabilidad de equilibrio. Del sistema de ecuaciones (3) y (4) obtenemos que en equilibrio q satisface las siguientes dos ecuaciones:

$$q = \frac{G(h_1) - U(h_2)}{U(h_1) - U(h_2)} = \frac{U(h_1) - G(h_2)}{U(h_1) - U(h_2)}.$$

Para que $q \geq 0$ es necesario que $G(h_1) \geq U(h_2)$ y $U(h_1) \geq G(h_2)$. Para que $q \leq 1$ es necesario que $G(h_1) \leq U(h_1)$ y $G(h_2) \geq U(h_2)$.

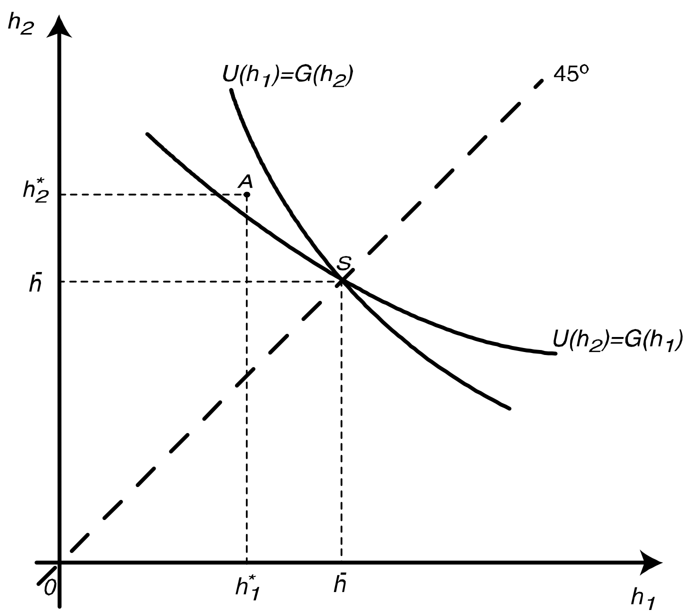

Figura 6

Ejercicio 3: Demostrar que, como la función G es creciente, resulta suficiente con verificar que se cumple que $G(h_1) \geq U(h_2)$ y $U(h_1) \geq G(h_2)$.

Es fácil ver que las ecuaciones $G(h_1) = U(h_2)$ y $U(h_1) = G(h_2)$ son simétricas con respecto a la recta de 45 grados $h_1 = h_2$ en el plano (h_1, h_2) (FIGURA 6).

El punto A en la Figura 6 satisface que $G(h_1) > U(h_2)$ y que $U(h_1) > G(h_2)$. Por lo tanto, una condición suficiente para que un equilibrio con sunspots (es decir, en el cual $h_1 > h_2$) exista es que la curva $U(h_1) = G(h_2)$ tenga mayor pendiente que la curva $G(h_1) = U(h_2)$ en el punto $(\bar{h}, \bar{h})$. La pendiente de la curva $U(h_1) = G(h_2)$ está dada por:

$$\frac{dh_2}{dh_1} = \frac{U'(h_1)}{G'(h_2)},$$

y la pendiente de la curva $G(h_1) = U(h_2)$ está dada por:

$$\frac{dh_2}{dh_1} = \frac{G'(h_1)}{U'(h_2)}.$$

Por lo tanto, para que exita un equilibrio con efectos sunspot es suficiente que

$$\left|\frac{U'(\bar{h})}{G'(\bar{h})}\right| > \left|\frac{G'(\bar{h})}{U'(\bar{h})}\right|,$$

que se cumple si

$$\left|\frac{G'(\bar{h})}{U'(\bar{h})}\right| < 1. \tag{5}$$

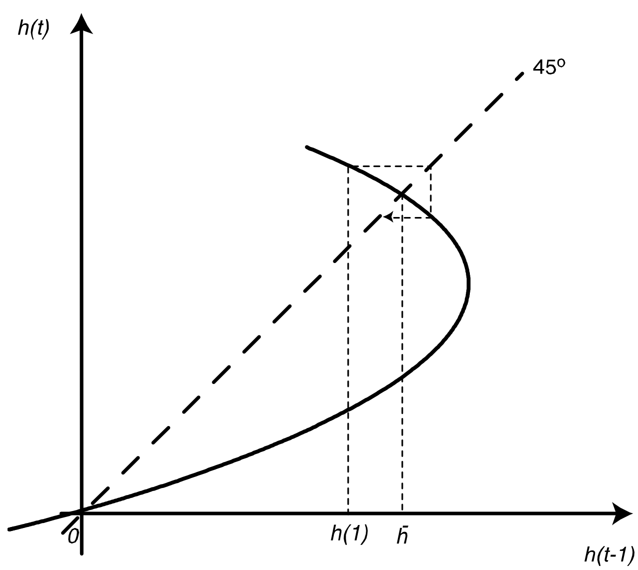

Figura 7

Resulta que esta condición es de hecho la condición que determina que el equilibrio monetario de estado estacionario (sin sunspots), es decir $\bar{h}$, es dinámicamente estable. Recordemos que la dinámica de equilibrio de un equilibrio monetario está dada por la ecuación

$$G(h(t)) = U(h(t+1)),$$

y que si se cumple la desigualdad (5) la variable $h(t)$ es estable alrededor de $\bar{h}$ en el sentido de que para cualquier $h(t)$ en un entorno de $\bar{h}$ se cumple que $h(t) \to \bar{h}$ cuando $t \to \infty$ (FIGURA 7).

Para concluir con la presentación del caso de equilibrios con efectos sunspot se provee una explicación intutiva de la lógica involucrada. La idea es que los agentes de la economía esperan que el nivel de precios fluctue entre dos valores, p_1 y p_2, de acuerdo con un proceso de Markov simple. Dado que tal es la creencia de los agentes de la economía, la demanda de dinero fluctua de forma tal que el nivel de precios de equilibrio (tal que se limpia el mercado de dinero) es consistente con dichos niveles de precio p_1 y p_2 (dada la demanda de dinero de los agentes, que como se dijo, depende de sus creencias en los efectos sunspots). En particular, si $p_1 > p_2$ tenemos que cuando el nivel de precios es p_1 el agente espera que el retorno de mantener dinero sea igual a uno (con probabilidad q) o mayor a uno (p_1/p_2, con probabilidad $1-q$). En tal caso el agente demandará más dinero que si esperara que el rendimiento de mantener dinero fuera uno o menor que uno ($p_2/p1$), que es el caso cuando el nivel de precios de la economía es p_2. Tal situación es consistente con un equilibrio como el que estamos considerando en el que se cumple que $h_2 = 1/p_2 > h_1 = 1/p_1$.

Indeterminación de los Tipos de Cambio Monetarios.

Consideramos ahora una economía conformada por dos países, 1 y 2. Cada uno de los países tiene la misma estructura económica que la que hemos estado estudiando hasta ahora. Además suponemos que existe intercambio libre de bienes, préstamos y dinero entre los países (*régimen laissez-faire*). También suponemos que cada país tiene su propia moneda y que hay un único bien de consumo que no es almacenable (en otras palabras, que las dos economías producen el mismo bien). Llamemos $H_i(0)$ la cantidad constante de papel moneda del pais i, con $i = 1, 2$. Las restricciones presupuestarias de los agentes (en cualquiera de las dos economías) estan dadas ahora por:

$$c_t(t) + \frac{m_{1t}(t)}{p_1(t)} + \frac{m_{2t}(t)}{p_2(t)} \leq \omega_1,$$

y

$$c_t(t+1) \leq \omega_2 + \frac{m_{1t}(t)}{p_1(t+1)} + \frac{m_{2t}(t)}{p_2(t+1)},$$

donde $m_{it}(t)$ es la cantidad de papel moneda de la economía i que demanda una agente de la generación t en el período t, y $p_i(t)$ es el nivel de precios de la economía i en el período t (es decir, la cantidad de papel moneda de la economía

i necesaria para comprar una unidad del bien en el momento t). Definimos el tipo de cambio nominal en el período t como $e(t) = p_1(t)/p_2(t)$.

Ejercicio 4: Demostrar que en equilibrio se cumple que $e(t) = e$ para todo t, es decir que el tipo de cambio nominal de equilibrio (con previsión perfecta) es constante en el tiempo.

El Ejercicio 2 nos dice que en esta economía mundial (un mundo de dos países) no puede haber cambios esperados en el tipo de cambio nominal. Un corolario simple del Ejercicio 2 es que las tasas de inflación de equilibrio es la misma en los dos países. Formalmente, se cumple que:

$$\frac{p_i(t)}{p_i(t+1)} = R(t) \text{ para } i = 1, 2.$$

La ecuación de limpieza de los mercados de dinero en el período t está dada entonces por la siguiente expresión:

$$f_1(R(t)) + f_2(R(t)) = \frac{H_1(0)}{p_1(t)} + \frac{H_2(0)}{p_2(t)} = \frac{1}{p_1(t)} \left[H_1(0) + eH_2(0)\right].$$

A continuación demostramos que el tipo de cambio nominal de equilibrio en esta economía mundial esta indeterminado. O en otras palabras, que asociado con cada uno de los valores de e pertenecientes al conjunto $(0, \infty)$ existe un equilibrio posible de la economía. Notemos que cuando $e = 1$, el análisis formal se reduce al realizado al principio de estas notas.

Supongamos ahora que tenemos un equilibrio en el cual una dada asignación intra e inter-temporal de consumo está asociada con las siguientes variables de precios: $e(t) = \bar{e}$ para todo t, $\{\bar{p}_1(t),\ \bar{p}_2(t)\}_{t=1}^{\infty}$, y $\left\{\bar{R}(t)\right\}_{t=1}^{\infty}$. Demostraremos que hay otro equilibrio con la misma asignación de consumo para las generaciones $t \geq 1$ y en el que $R(t) = \bar{R}(t)$ para todo t, pero en el que se cumple que, para todo t, $e(t) = \widehat{e} \neq \bar{e}$, $p_1(t) = \widehat{p}_1(t) \neq \bar{p}_1(t)$, y $p_2(t) = \widehat{p}_2(t) \neq \bar{p}_2(t)$. La asignación de consumo de los viejos de la generación 0 dependerá del valor de e de equilibrio a no ser que los viejos iniciales de cada país tengan dotaciones iguales de ambas monedas. Empezamos fijando un valor arbitrario $\widehat{e} \neq \bar{e}$ y construimos precios consistentes con dicho valor de e. Primero elegimos $\widehat{p}_1(t)$ tal que

$$\frac{1}{\widehat{p}_1(t)} \left[H_1(0) + \widehat{e}H_2(0)\right] = f_1(\bar{R}(t)) + f_2(\bar{R}(t)). \tag{6}$$

Como $\bar{p}_1(t)$ es parte de un equilibrio con $e(t) = \bar{e}$ tenemos que

$$\frac{1}{\bar{p}_1(t)} \left[H_1(0) + \bar{e}H_2(0)\right] = f_1(\bar{R}(t)) + f_2(\bar{R}(t)),$$

y

$$\bar{R}(t) = \frac{\bar{p}_1(t)}{\bar{p}_1(t+1)} = \frac{f_1(\bar{R}(t+1)) + f_2(\bar{R}(t+1))}{f_1(\bar{R}(t)) + f_2(\bar{R}(t))} = \frac{\widehat{p}_1(t)}{\widehat{p}_1(t+1)},$$

es decir que $\bar{R}(t)$ es también el retorno de equilibrio sobre el ahorro en el equilibrio con $e(t) = \widehat{e}$. Sólo nos falta determinar el valor de equilibrio $p_2(t)$. Elegimos entonces $\widehat{p}_2(t) = \widehat{p}_1(t)/\widehat{e}$. Para demostrar que el ahorro y las asignaciones de consumo para las generaciones $t = 1, 2, ...$ en el nuevo equilibrio con $e(t) = \widehat{e}$ son las mismas que en el equilibrio con $e(t) = \bar{e}$ notemos que la restricción presupuestaria intertemporal del agente de la generación t se puede escribir como sigue:

$$c_t(t) + \frac{1}{R(t)} c_t(t+1) = \omega_1 + \frac{1}{R(t)} \omega_2,$$

y como $R(t)$ es igual en ambos equilibrios tenemos que la solución del problema del agente es la misma. En resumen, las variables de precios $e(t) = \widehat{e}$ para todo t, $\{\widehat{p}_1(t),\ \widehat{p}_2(t)\}_{t=1}^{\infty}$, y $\{\bar{R}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ son tales que: *(i)* $e(t) = p_1(t)/p_2(t)$ y $R(t) = p_i(t)/p_i(t+1)$ para $i = 1, 2$ y para todo t, *(ii)* el mercado de dinero se limpia de acuerdo con la ecuación (6), y *(iii)* las demandas de saldos reales $f_1(\bar{R}(t))$ y $f_2(\bar{R}(t))$ resuelven el problema de los agentes en ambas economías dados los precios $e(t) = \widehat{e}$ para todo t, $\{\widehat{p}_1(t),\ \widehat{p}_2(t)\}_{t=1}^{\infty}$, y $\{\bar{R}(t)\}_{t=1}^{\infty}$. Es decir, tenemos un nuevo equilibrio.

Ejercicio 5: Demostrar que si los agentes viejos del primer período (la generación 0) en la economía i tienen como dotación $H_i(0)$, con $i = 1, 2$, se cumple que sus asignaciones de consumo dependen del valor de equilibrio de los precios. Demostrar además que si tienen como dotación $H_i(0)/2$ y $H_j(0)/2$, con $i \neq j$, luego sus asignaciones de consumo no cambian, y por lo tanto, la indeterminación que estudiamos es puramente nominal.

¿Qué nos dice, y qué no nos dice, el resultado de indeterminación de los tipos de cambio nominales en el modelo monetario de generaciones superpuestas? El resultado no nos dice que los tipos de cambio nominales en el mundo tienden a estar indeterminados. Sin embargo, nos dice que para que los tipos de cambio nominales estén determinados es necesario capturar en el modelo algún aspecto de la realidad que no está contemplado en las especificaciones básicas de los fundamentales de la economía que utilizamos en nuestra descripción de la economía mundial. Kareken y Wallace proponen posibles cambios que hacen que el tipo de cambio este determinado.

Lecturas Complementarias

1) Dynamic Macroeconomic Theory, T. Sargent (1987) Harvard University Press. (Capítulo 7)
2) Econometric Policy Evaluation: A Critique, R. Lucas ((1976).
3) Self-Fulfilling Prophecies, C. Azariadis (1981), Journal of Economic Theory 25.
4) Do Sunspots Matter?, D. Cass y K. Shell (1983), Journal of Political Economy.
5) On the Indeterminacy of Equilibrium Exchange Rates, J. Kareken y N. Wallace (1981), Quarterly Journal of Economics, May.

Huberto M. Ennis
13 de junio de 2003
huberto.ennis@rich.frb.org